OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XI -a

Soluţii

1) **a)** Mărginirea : $0<x_n<\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+1}}_{n\text{ ori}}=\frac{n}{n+1}<1$ deci $0<x_n<1,(\forall)n\geq 1$

Monotonia : $x_{n+1}-x_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$

.

Deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Conform teoremei Weierstrass $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$=convergent.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{x_{n+1}}-e^{x_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot e^{x_n}\cdot\left(e^{x_{n+1}-x_n}-1\right)=2\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{x_{n+1}-x_n}-1\right)=$

$=2\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{\left(e^{x_{n+1}-x_n}-1\right)}{x_{n+1}-x_n}\cdot(x_{n+1}-x_n)=2\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

2) $a_n=\left\{\sqrt{n^2+5n+9}\right\}=\sqrt{n^2+5n+9}-\left[\sqrt{n^2+5n+9}\right]$

Deoarece $(n+2)^2<n^2+5n+9<(n+3)^2\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+5n+9}\right]=n+2$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+9}-(n+2)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+9-(n+2)^2}{\sqrt{n^2+5n+9}+(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{9}{n^2}}+1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$

3) **a)** $A-I_n=A-A^3=A\left(I_n-A^2\right)=A(I_n+A)(I_n-A)$ şi $A^3=I_n\Rightarrow\det A=1\Rightarrow A=$inversabilă

Deducem din prima relaţie: $A-I_n=A(I_n+A)(I_n-A)\Rightarrow(-1)\cdot(I_n-A)=A(I_n+A)(I_n-A)$

Deoarece I_n-A este inversabilă, deducem că $A(I_n+A)=-I_n\Rightarrow I_n+A=-A^{-1}$

b) $\det A=1\Rightarrow A^{-1}=A^*\Rightarrow\det A^{-1}=\det A^*$

Dar $A^3=I_n\Leftrightarrow A\cdot A^2=I_n\Rightarrow A^{-1}=A^2\Rightarrow\det A^{-1}=\det A^2=(\det A)^2=1$

a) $\Rightarrow I_n + A = -A^{-1} \Rightarrow I_n + A = -A^* \Rightarrow \det(I_n + A) = \det(-A^*) = (-1)^n \cdot \det A^* = (-1)^n \cdot 1 = (-1)^n$

4) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Cum $\det(A) = 2 \Rightarrow ad - bc = 2 \Rightarrow ad, bc$ au aceeaşi paritate.

Complementţii algebrici ai matricei A sunt numerele: $d, -b, -c, a$ deci tot numere întregi.

Cazul 1: ad, bc = pare $\Rightarrow$ cel puţin unul dintre numerele a şi d , respectiv b şi c trebuie să fie par.

Dacă a,b,c,d = pare atunci $ad \vdots 4$ şi $bc \vdots 4 \Rightarrow (ad - bc) \vdots 4$ ceea ce contrazice ipoteza $\det(A) = 2$.

Deci cel puţin unul dintre numere este impar şi cel puţin un complement algebric va fi număr impar.

Cazul 2: ad, bc = impare $\Rightarrow a,b,c,d$ = impare deci complementţii algebrici vor fi numere impare.